组合计数

清华大学学生算法协会　任舍予

2024 年 8 月 18 日

- 本课程所需的前置知识：高中数学。
- 本课程中讨论的所有内容默认对 $p = 998244353$ 取模。
- 一般情况下，定义 $0^0 = 1$。

组合计数

- 组合计数类问题的形式化定义：
- 对于集合 S 中满足性质 P 的 x 求权值函数 $w(x)$ 之和，即

$$\sum_{x \in S} [P(x)]w(x).$$

- 其中 S 称作**组合类**，x 称作**组合对象**。

组合计数

- 组合计数类问题的形式化定义:
- 对于集合 S 中满足性质 P 的 x 求权值函数 $w(x)$ 之和，即

$$\sum_{x\in S}[P(x)]w(x).$$

- 其中 S 称作**组合类**，x 称作**组合对象**。
- 一种基本的计数思想：构造**双射**，即将不同组合类间的组合对象一一对应。

加法原理与乘法原理

- 分类加法原理：所有类别的答案可以相加，对应组合类的不交并划分。

加法原理与乘法原理

- 分类加法原理：所有类别的答案可以相加，对应组合类的不交并划分。
- 分步乘法原理：所有步骤的答案可以相乘，对应组合类的笛卡尔积拆分。

问题 (洛谷 P8557)

有 k 个有标号的集合，每个集合都是 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的一个子集（可以为空），求有多少种情况，使得 k 个集合的并集是 $\{1, 2, \ldots, n\}$。
数据范围：$1 \le n, k \le 10^9$。

问题 (洛谷 P8557)

有 k 个有标号的集合，每个集合都是 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的一个子集（可以为空），求有多少种情况，使得 k 个集合的并集是 $\{1,2,\ldots,n\}$。
数据范围：$1 \le n,k \le 10^9$。

- 从每个元素的角度考虑：元素 i 在 2^k-1 种情况中出现。

问题 (洛谷 P8557)

有 k 个有标号的集合，每个集合都是 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的一个子集（可以为空），求有多少种情况，使得 k 个集合的并集是 $\{1,2,\ldots,n\}$。
数据范围：$1 \le n, k \le 10^9$。

- 从每个元素的角度考虑：元素 i 在 2^k-1 种情况中出现。
- 由于每个元素是独立的，由乘法原理可以得到答案为 $(2^k-1)^n$。

问题 (洛谷 P8557)

有 k 个有标号的集合，每个集合都是 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的一个子集（可以为空），求有多少种情况，使得 k 个集合的并集是 $\{1,2,\ldots,n\}$。
数据范围：$1 \le n,k \le 10^9$。

- 从每个元素的角度考虑：元素 i 在 2^k-1 种情况中出现。
- 由于每个元素是独立的，由乘法原理可以得到答案为 $(2^k-1)^n$。
- 时间复杂度 $O(\log k+\log n)$。

问题

给定 $a_1, \ldots, a_n$，求 n 元正整数组 $(x_1, \ldots, x_n)$ 的数量，满足：

- $x_i \le a_i$；
- 所有的 x_i 互不相同，

数据范围：$1 \le n \le 10^6$，$1 \le a_i \le 10^9$。

问题

给定 $a_1, \ldots, a_n$，求 n 元正整数组 $(x_1, \ldots, x_n)$ 的数量，满足：

- $x_i \le a_i$；
- 所有的 x_i 互不相同，

数据范围：$1 \le n \le 10^6$，$1 \le a_i \le 10^9$。

- 尝试应用乘法原理：在前 $i-1$ 个数的基础上加入第 i 个数。

问题

给定 $a_1, \dots, a_n$，求 n 元正整数组 $(x_1, \dots, x_n)$ 的数量，满足：

- $x_i \le a_i$；
- 所有的 x_i 互不相同，

数据范围：$1 \le n \le 10^6$，$1 \le a_i \le 10^9$。

- 尝试应用乘法原理：在前 $i-1$ 个数的基础上加入第 i 个数。
- 可能遇到的问题是：存在 $j < i$ 使得 $x_j > a_i$，不会影响 x_i 的取值范围。

问题

给定 $a_1, \ldots, a_n$，求 n 元正整数组 $(x_1, \ldots, x_n)$ 的数量，满足：

- $x_i \le a_i$；
- 所有的 x_i 互不相同，

数据范围：$1 \le n \le 10^6$，$1 \le a_i \le 10^9$。

- 尝试应用乘法原理：在前 $i-1$ 个数的基础上加入第 i 个数。
- 可能遇到的问题是：存在 $j < i$ 使得 $x_j > a_i$，不会影响 x_i 的取值范围。
- 考虑将 a_i 排序，即令 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$。

问题

给定 $a_1, \ldots, a_n$，求 n 元正整数组 $(x_1, \ldots, x_n)$ 的数量，满足：

- $x_i \le a_i$；
- 所有的 x_i 互不相同，

数据范围：$1 \le n \le 10^6$，$1 \le a_i \le 10^9$。

- 尝试应用乘法原理：在前 $i-1$ 个数的基础上加入第 i 个数。
- 可能遇到的问题是：存在 $j < i$ 使得 $x_j > a_i$，不会影响 x_i 的取值范围。
- 考虑将 a_i 排序，即令 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$。
- 此时 x_i 只需要满足 $x_i \le a_i$ 且对于所有 $1 \le j < i$，$x_i \ne x_j$。

问题

给定 $a_1, \ldots, a_n$，求 n 元正整数组 $(x_1, \ldots, x_n)$ 的数量，满足：

- $x_i \le a_i$；
- 所有的 x_i 互不相同，

数据范围：$1 \le n \le 10^6$，$1 \le a_i \le 10^9$。

- 尝试应用乘法原理：在前 $i-1$ 个数的基础上加入第 i 个数。
- 可能遇到的问题是：存在 $j < i$ 使得 $x_j > a_i$，不会影响 x_i 的取值范围。
- 考虑将 a_i 排序，即令 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$。
- 此时 x_i 只需要满足 $x_i \le a_i$ 且对于所有 $1 \le j < i$，$x_i \ne x_j$。
- 答案即为 $\prod_{i=1}^{n}(a_i - i + 1)$。

问题

给定 $a_1, \ldots, a_n$，求 n 元正整数组 $(x_1, \ldots, x_n)$ 的数量，满足：

- $x_i \le a_i$；
- 所有的 x_i 互不相同，

数据范围：$1 \le n \le 10^6$，$1 \le a_i \le 10^9$。

- 尝试应用乘法原理：在前 $i-1$ 个数的基础上加入第 i 个数。
- 可能遇到的问题是：存在 $j < i$ 使得 $x_j > a_i$，不会影响 x_i 的取值范围。
- 考虑将 a_i 排序，即令 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$。
- 此时 x_i 只需要满足 $x_i \le a_i$ 且对于所有 $1 \le j < i$，$x_i \ne x_j$。
- 答案即为 $\prod_{i=1}^{n}(a_i - i + 1)$。
- 时间复杂度 $O(n)$。

问题

求长度为 n，元素不超过 m，且逆序对数为偶数的正整数序列的数量。
数据范围：$1 \le n, m \le 10^9$。

问题

求长度为 n，元素不超过 m，且逆序对数为偶数的正整数序列的数量。
数据范围：$1 \leq n, m \leq 10^9$。

- 对于逆序对数为偶数的限制，可以作如下变换：
  - 记逆序对数为 c，分别置权值为 $w = 1$ 与 $w = (-1)^c$，得到答案 C_0 与 C_1；
  - 则逆序对数为偶数的答案为 $(C_0 + C_1)/2$，为奇数的答案为 $(C_0 - C_1)/2$。

问题

求长度为 n，元素不超过 m，且逆序对数为偶数的正整数序列的数量。
数据范围：$1 \le n, m \le 10^9$。

- 对于逆序对数为偶数的限制，可以作如下变换：
  - 记逆序对数为 c，分别置权值为 $w = 1$ 与 $w = (-1)^c$，得到答案 C_0 与 C_1；
  - 则逆序对数为偶数的答案为 $(C_0 + C_1)/2$，为奇数的答案为 $(C_0 - C_1)/2$。
- 容易得到 C_1 即为 m^n。

问题

求长度为 n，元素不超过 m，且逆序对数为偶数的正整数序列的数量。
数据范围：$1 \leq n, m \leq 10^9$。

- 对于逆序对数为偶数的限制，可以作如下变换：
  - 记逆序对数为 c，分别置权值为 $w = 1$ 与 $w = (-1)^c$，得到答案 C_0 与 C_1；
  - 则逆序对数为偶数的答案为 $(C_0 + C_1)/2$，为奇数的答案为 $(C_0 - C_1)/2$。
- 容易得到 C_1 即为 m^n。
- 考虑构造双射辅助计算 C_2。对于序列 $[a_1, \ldots, a_n]$：
  - 若 $a_1 \neq a_2$，则该序列的贡献与交换 a_1, a_2 得到的序列的贡献抵消；
  - 类似地，$a_3 \neq a_4$，$a_5 \neq a_6$，$a_{2k-1} \neq a_{2k}$ 的序列贡献均可以相互抵消；
  - 否则一定满足 $a_{2k-1} = a_{2k}$，此时恰好逆序对数一定为偶数。
- 于是可以得到 $C_2 = m^{\lceil n/2 \rceil}$。

问题

求长度为 n，元素不超过 m，且逆序对数为偶数的正整数序列的数量。
数据范围：$1 \le n, m \le 10^9$。

- 对于逆序对数为偶数的限制，可以作如下变换：
  - 记逆序对数为 c，分别置权值为 $w = 1$ 与 $w = (-1)^c$，得到答案 C_0 与 C_1；
  - 则逆序对数为偶数的答案为 $(C_0 + C_1)/2$，为奇数的答案为 $(C_0 - C_1)/2$。
- 容易得到 C_1 即为 m^n。
- 考虑构造双射辅助计算 C_2。对于序列 $[a_1, \ldots, a_n]$：
  - 若 $a_1 \neq a_2$，则该序列的贡献与交换 a_1, a_2 得到的序列的贡献抵消；
  - 类似地，$a_3 \neq a_4$，$a_5 \neq a_6$，$a_{2k-1} \neq a_{2k}$ 的序列贡献均可以相互抵消；
  - 否则一定满足 $a_{2k-1} = a_{2k}$，此时恰好逆序对数一定为偶数。
- 于是可以得到 $C_2 = m^{\lceil n/2 \rceil}$。
- 答案即为 $\left(m^n + m^{\lceil n/2 \rceil}\right)/2$。

问题

求长度为 n，元素不超过 m，且逆序对数为偶数的正整数序列的数量。
数据范围：$1 \le n, m \le 10^9$。

- 对于逆序对数为偶数的限制，可以作如下变换：
  - 记逆序对数为 c，分别置权值为 $w = 1$ 与 $w = (-1)^c$，得到答案 C_0 与 C_1；
  - 则逆序对数为偶数的答案为 $(C_0 + C_1)/2$，为奇数的答案为 $(C_0 - C_1)/2$。
- 容易得到 C_1 即为 m^n。
- 考虑构造双射辅助计算 C_2。对于序列 $[a_1, \ldots, a_n]$：
  - 若 $a_1 \ne a_2$，则该序列的贡献与交换 a_1, a_2 得到的序列的贡献抵消；
  - 类似地，$a_3 \ne a_4$，$a_5 \ne a_6$，$a_{2k-1} \ne a_{2k}$ 的序列贡献均可以相互抵消；
  - 否则一定满足 $a_{2k-1} = a_{2k}$，此时恰好逆序对数一定为偶数。
- 于是可以得到 $C_2 = m^{\lceil n/2 \rceil}$。
- 答案即为 $\left(m^n + m^{\lceil n/2 \rceil}\right)/2$。
- 时间复杂度 $O(\log n)$。

问题

求 n 个点的有标号无根树个数。

数据范围：$1 \le n \le 10^9$。

问题

求 n 个点的有标号无根树个数。
数据范围：$1 \leq n \leq 10^9$。

- 无根树没有太好的结构，考虑先转为对有根外向树计数。

问题

求 n 个点的有标号无根树个数。
数据范围： $1 \le n \le 10^9$ 。

- 无根树没有太好的结构，考虑先转为对有根外向树计数。
- 注意到有根外向树删去若干条边后会仍然是有根外向树森林。

问题

求 n 个点的有标号无根树个数。
数据范围：$1 \le n \le 10^9$。

- 无根树没有太好的结构，考虑先转为对有根外向树计数。
- 注意到有根外向树删去若干条边后会仍然是有根外向树森林。
- 考虑从 n 个点开始，依次加入每条边，由一个点连向另一连通块的根。

问题

求 n 个点的有标号无根树个数。
数据范围：$1 \le n \le 10^9$。

- 无根树没有太好的结构，考虑先转为对有根外向树计数。
- 注意到有根外向树删去若干条边后会仍然是有根外向树森林。
- 考虑从 n 个点开始，依次加入每条边，由一个点连向另一连通块的根。
- 加入第 i 条边前，图由 $n-i+1$ 个连通块构成，于是方案数为 $n(n-i)$。

问题

求 n 个点的有标号无根树个数。
数据范围：$1 \le n \le 10^9$。

- 无根树没有太好的结构，考虑先转为对有根外向树计数。
- 注意到有根外向树删去若干条边后会仍然是有根外向树森林。
- 考虑从 n 个点开始，依次加入每条边，由一个点连向另一连通块的根。
- 加入第 i 条边前，图由 $n-i+1$ 个连通块构成，于是方案数为 $n(n-i)$。
- 由乘法原理，答案即为 $\prod_{i=1}^{n-1} n(n-i) = n^{n-1}(n-1)!$。

问题

求 n 个点的有标号无根树个数。
数据范围：$1 \leq n \leq 10^9$。

- 无根树没有太好的结构，考虑先转为对有根外向树计数。
- 注意到有根外向树删去若干条边后会仍然是有根外向树森林。
- 考虑从 n 个点开始，依次加入每条边，由一个点连向另一连通块的根。
- 加入第 i 条边前，图由 $n-i+1$ 个连通块构成，于是方案数为 $n(n-i)$。
- 由乘法原理，答案即为 $\prod_{i=1}^{n-1} n(n-i) = n^{n-1}(n-1)!$。
- 由于选择根的方案数为 n，同时有 $(n-1)!$ 种不同的加边顺序，答案即为

$$n^{n-1}(n-1)!/n! = n^{n-2}.$$

问题

求 n 个点的有标号无根树个数。
数据范围：$1 \le n \le 10^9$。

- 无根树没有太好的结构，考虑先转为对有根外向树计数。
- 注意到有根外向树删去若干条边后会仍然是有根外向树森林。
- 考虑从 n 个点开始，依次加入每条边，由一个点连向另一连通块的根。
- 加入第 i 条边前，图由 $n-i+1$ 个连通块构成，于是方案数为 $n(n-i)$。
- 由乘法原理，答案即为 $\prod_{i=1}^{n-1} n(n-i) = n^{n-1}(n-1)!$。
- 由于选择根的方案数为 n，同时有 $(n-1)!$ 种不同的加边顺序，答案即为

$$n^{n-1}(n-1)!/n! = n^{n-2}.$$

- 时间复杂度 $O(\log n)$。

问题 (CF838D)

飞机上有 n 个座位，m 个人每个人有一个目标座位。每个人会依次从前门和后门中的一个进来然后找到目标座位。如果目标座位有人的话就会继续走直到找到一个座位坐下。求每个人都能找到一个座位的方案数。两种方案不同当且仅当某位乘客的目标座位不同或上飞机走的门不同。

数据范围：$1 \leq m \leq n \leq 10^6$。

问题 (CF838D)

飞机上有 n 个座位，m 个人每个人有一个目标座位。每个人会依次从前门和后门中的一个进来然后找到目标座位。如果目标座位有人的话就会继续走直到找到一个座位坐下。求每个人都能找到一个座位的方案数。两种方案不同当且仅当某位乘客的目标座位不同或上飞机走的门不同。

数据范围：$1 \leq m \leq n \leq 10^6$。

- 构造形式更简洁的双射：增加 $n+1$ 号座位，然后将所有座位视作环状的。

问题 (CF838D)

飞机上有 n 个座位，m 个人每个人有一个目标座位。每个人会依次从前门和后门中的一个进来然后找到目标座位。如果目标座位有人的话就会继续走直到找到一个座位坐下。求每个人都能找到一个座位的方案数。两种方案不同当且仅当某位乘客的目标座位不同或上飞机走的门不同。

数据范围：$1 \leq m \leq n \leq 10^6$。

- 构造形式更简洁的双射：增加 $n+1$ 号座位，然后将所有座位视作环状的。
- 此时每个人一定都有座位，并且找到座位当且仅当 $n+1$ 号座位没有人。

问题 (CF838D)

飞机上有 n 个座位，m 个人每个人有一个目标座位。每个人会依次从前门和后门中的一个进来然后找到目标座位。如果目标座位有人的话就会继续走直到找到一个座位坐下。求每个人都能找到一个座位的方案数。两种方案不同当且仅当某位乘客的目标座位不同或上飞机走的门不同。

数据范围：$1 \leq m \leq n \leq 10^6$。

- 构造形式更简洁的双射：增加 $n+1$ 号座位，然后将所有座位视作环状的。
- 此时每个人一定都有座位，并且找到座位当且仅当 $n+1$ 号座位没有人。
- 新问题的总方案数即为 $2^m(n+1)^m$。

问题 (CF838D)

飞机上有 n 个座位，m 个人每个人有一个目标座位。每个人会依次从前门和后门中的一个进来然后找到目标座位。如果目标座位有人的话就会继续走直到找到一个座位坐下。求每个人都能找到一个座位的方案数。两种方案不同当且仅当某位乘客的目标座位不同或上飞机走的门不同。

数据范围：$1 \le m \le n \le 10^6$。

- 构造形式更简洁的双射：增加 $n+1$ 号座位，然后将所有座位视作环状的。
- 此时每个人一定都有座位，并且找到座位当且仅当 $n+1$ 号座位没有人。
- 新问题的总方案数即为 $2^m(n+1)^m$。
- 根据对称性，$n+1$ 号座位没有人的方案占总方案数的 $\frac{n-m+1}{n+1}$。

问题 (CF838D)

飞机上有 n 个座位，m 个人每个人有一个目标座位。每个人会依次从前门和后门中的一个进来然后找到目标座位。如果目标座位有人的话就会继续走直到找到一个座位坐下。求每个人都能找到一个座位的方案数。两种方案不同当且仅当某位乘客的目标座位不同或上飞机走的门不同。

数据范围：$1 \le m \le n \le 10^6$。

- 构造形式更简洁的双射：增加 $n+1$ 号座位，然后将所有座位视作环状的。
- 此时每个人一定都有座位，并且找到座位当且仅当 $n+1$ 号座位没有人。
- 新问题的总方案数即为 $2^m(n+1)^m$。
- 根据对称性，$n+1$ 号座位没有人的方案占总方案数的 $\frac{n-m+1}{n+1}$。
- 于是答案即为 $(n-m+1)2^m(n+1)^{m-1}$。

问题 (CF838D)

飞机上有 n 个座位，m 个人每个人有一个目标座位。每个人会依次从前门和后门中的一个进来然后找到目标座位。如果目标座位有人的话就会继续走直到找到一个座位坐下。求每个人都能找到一个座位的方案数。两种方案不同当且仅当某位乘客的目标座位不同或上飞机走的门不同。

数据范围：$1 \leq m \leq n \leq 10^6$。

- 构造形式更简洁的双射：增加 $n+1$ 号座位，然后将所有座位视作环状的。
- 此时每个人一定都有座位，并且找到座位当且仅当 $n+1$ 号座位没有人。
- 新问题的总方案数即为 $2^m(n+1)^m$。
- 根据对称性，$n+1$ 号座位没有人的方案占总方案数的 $\frac{n-m+1}{n+1}$。
- 于是答案即为 $(n-m+1)2^m(n+1)^{m-1}$。
- 时间复杂度 $O(\log n)$。

二项式系数

- 定义 $\binom{n}{m}$ 为从 n 个有标号的元素中取出 m 个元素的方案数。

二项式系数

- 定义 $\binom{n}{m}$ 为从 n 个有标号的元素中取出 m 个元素的方案数。
- 可以由两种角度计算：

二项式系数

- 定义 $\binom{n}{m}$ 为从 n 个有标号的元素中取出 m 个元素的方案数。
- 可以由两种角度计算:
  - 加法原理: 考虑第 n 个元素是否被选:

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}.$$

二项式系数

- 定义 $\binom{n}{m}$ 为从 n 个有标号的元素中取出 m 个元素的方案数。
- 可以由两种角度计算:
  - 加法原理: 考虑第 n 个元素是否被选:

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}.$$

  - 乘法原理: 对于每个 $1 \sim n$ 的排列，取前 m 个:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

二项式系数

- 定义 $\binom{n}{m}$ 为从 n 个有标号的元素中取出 m 个元素的方案数。
- 可以由两种角度计算:
  - 加法原理:考虑第 n 个元素是否被选:

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}.$$

  - 乘法原理:对于每个 $1 \sim n$ 的排列,取前 m 个:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

- 在实际问题中,求二项式系数的方法需要根据数据范围与模数决定。
- 例如,对于 n, m 大于模数的情况,需要使用 Lucas 定理进行计算。

二项式系数

- 定义 $\binom{n}{m}$ 为从 n 个有标号的元素中取出 m 个元素的方案数。
- 可以由两种角度计算:
  - 加法原理:考虑第 n 个元素是否被选:

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}.$$

  - 乘法原理:对于每个 $1 \sim n$ 的排列,取前 m 个:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

- 在实际问题中,求二项式系数的方法需要根据数据范围与模数决定。
- 例如,对于 n, m 大于模数的情况,需要使用 Lucas 定理进行计算。
- 以下讨论的部分问题中可能忽略求二项式系数的方法及复杂度问题。

组合恒等式

组合恒等式

- 下指标反转：

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}.$$

组合恒等式

- 下指标反转：

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}.$$

- 二项式定理：

$$(a+b)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

组合恒等式

- 下指标反转：

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}.$$

- 二项式定理：

$$(a+b)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

- 下指标求和：

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} = 2^n, \qquad \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = [n=0].$$

组合恒等式

- 上指标求和：

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{m}=\binom{n+1}{m+1}.$$

组合恒等式

- 上指标求和:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{m}=\binom{n+1}{m+1}.$$

- 吸收恒等式:

$$\binom{n}{m}=\frac{n}{n-m}\binom{n-1}{m}=\frac{n-m+1}{m}\binom{n}{m-1}=\frac{n}{m}\binom{n-1}{m-1}.$$

组合恒等式

- 上指标求和：

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{m}=\binom{n+1}{m+1}.$$

- 吸收恒等式：

$$\binom{n}{m}=\frac{n}{n-m}\binom{n-1}{m}=\frac{n-m+1}{m}\binom{n}{m-1}=\frac{n}{m}\binom{n-1}{m-1}.$$

- 范德蒙德卷积：

$$\binom{n+m}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}.$$

二项式系数的推广

二项式系数的推广

- **广义二项式系数**:

$$\binom{\alpha}{m} = \frac{\alpha^{\underline{m}}}{m!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+1)}{m!}.$$

二项式系数的推广

- **广义二项式系数**:

$$\binom{\alpha}{m} = \frac{\alpha^{\underline{m}}}{m!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+1)}{m!}.$$

- **上指标反转**:

$$\binom{\alpha}{m} = (-1)^m \binom{m-\alpha-1}{m}.$$

二项式系数的推广

- **广义二项式系数**：

$$\binom{\alpha}{m}=\frac{\alpha^{\underline{m}}}{m!}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-m+1)}{m!}.$$

  - 上指标反转：

$$\binom{\alpha}{m}=(-1)^m\binom{m-\alpha-1}{m}.$$

- **多项式系数**：令 $\sum_{i=1}^m a_i=n$，

$$\binom{n}{a_1,\ldots,a_m}=\frac{n!}{\prod_{i=1}^m a_i!}.$$

二项式系数的推广

- 广义二项式系数：

$$\binom{\alpha}{m} = \frac{\alpha^{\underline{m}}}{m!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+1)}{m!}.$$

  - 上指标反转：

$$\binom{\alpha}{m} = (-1)^m \binom{m-\alpha-1}{m}.$$

- 多项式系数：令 $\sum_{i=1}^{m} a_i = n$，

$$\binom{n}{a_1, \dots, a_m} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{m} a_i!}.$$

  - 多项式定理：

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^n = \sum_{\sum_{i=1}^{m} a_i = n} \binom{n}{a_1, \dots, a_m} \prod_{i=1}^{m} {x_i}^{a_i}.$$

- 不定方程的整数解：
  - 求方程 $x_1 + \cdots + x_m = n$ 的正整数解个数；
  - 求方程 $x_1 + \cdots + x_m = n$ 的非负整数解个数。

- 不定方程的整数解：
  - 求方程 $x_1 + \cdots + x_m = n$ 的正整数解个数；
  - 求方程 $x_1 + \cdots + x_m = n$ 的非负整数解个数。
- 单调序列计数：
  - 求有多少个整数序列 $[a_1, \ldots, a_n]$，满足 $1 \leq a_1 < \cdots < a_n \leq m$；
  - 求有多少个整数序列 $[a_1, \ldots, a_n]$，满足 $1 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq m$。

- 不定方程的整数解：
  - 求方程 $x_1 + \cdots + x_m = n$ 的正整数解个数；
  - 求方程 $x_1 + \cdots + x_m = n$ 的非负整数解个数。
- 单调序列计数：
  - 求有多少个整数序列 $[a_1, \ldots, a_n]$，满足 $1 \leq a_1 < \cdots < a_n \leq m$；
  - 求有多少个整数序列 $[a_1, \ldots, a_n]$，满足 $1 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq m$。
- 格路计数：
  - 求在平面网格图上从 $(0, 0)$ 走到 (n, m) 且每一步只能向右或向上的方案数。

问题 (ABC154F)

给定 r_1, r_2, c_1, c_2，求

$$\sum_{i=r_1}^{r_2} \sum_{j=c_1}^{c_2} \binom{i+j}{i}.$$

数据范围：$1 \le r_1 \le r_2 \le 10^6$，$1 \le c_1 \le c_2 \le 10^6$。

问题 (ABC154F)

给定 r_1, r_2, c_1, c_2，求

$$\sum_{i=r_1}^{r_2} \sum_{j=c_1}^{c_2} \binom{i+j}{i}.$$

数据范围：$1 \le r_1 \le r_2 \le 10^6$，$1 \le c_1 \le c_2 \le 10^6$。

- 首先可以差分为 $\sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{c} \binom{i+j}{i}$。
- 考虑上指标求和：$\sum_{j=0}^{c} \binom{i+j}{i} = \binom{i+c+1}{i+1}$。
- 考虑下指标反转后上指标求和：

$$\sum_{i=0}^{r} \binom{i+c+1}{i+1} = \sum_{i=0}^{r} \binom{i+c+1}{c} = \binom{r+c+2}{c+1} - 1.$$

- 时间复杂度 $O(r_2 + c_2)$。

问题 (洛谷 P3223)

求将 n 名男同学，m 名女同学，两名老师排成一队，且任意两名女同学不相邻，任意两名老师不相邻的方案数。

数据范围：$1 \leq n, m \leq 2000$。

问题 (洛谷 P3223)

求将 n 名男同学，m 名女同学，两名老师排成一队，且任意两名女同学不相邻，任意两名老师不相邻的方案数。
数据范围：$1 \leq n, m \leq 2000$。

- 先将男同学排好，方案数为 $n!$。

问题 (洛谷 P3223)

求将 n 名男同学，m 名女同学，两名老师排成一队，且任意两名女同学不相邻，任意两名老师不相邻的方案数。
数据范围：$1 \le n, m \le 2000$。

- 先将男同学排好，方案数为 $n!$。
- 接下来将老师插入男同学的队伍中：
  - 若两名老师不相邻，则老师有 $n(n+1)$ 种选位置的方式，女同学需要在 $n+3$ 个位置种选择 m 个，因此有 $m!\binom{n+3}{m}$ 种选位置的方式。

问题 (洛谷 P3223)

求将 n 名男同学，m 名女同学，两名老师排成一队，且任意两名女同学不相邻，任意两名老师不相邻的方案数。
数据范围：$1 \leq n, m \leq 2000$。

- 先将男同学排好，方案数为 $n!$。
- 接下来将老师插入男同学的队伍中：
  - 若两名老师不相邻，则老师有 $n(n+1)$ 种选位置的方式，女同学需要在 $n+3$ 个位置种选择 m 个，因此有 $m!\binom{n+3}{m}$ 种选位置的方式。
  - 若两名老师相邻，则师有 $2(n+1)$ 种选位置的方式，一名女同学需要站在两个老师之间，剩下的女同学要在 $n+2$ 个位置中选择 $m-1$ 个，因此有 $m(m-1)!\binom{n+2}{m-1}$ 种选位置的方式。

问题 (洛谷 P3223)

求将 n 名男同学，m 名女同学，两名老师排成一队，且任意两名女同学不相邻，任意两名老师不相邻的方案数。
数据范围：$1 \le n, m \le 2000$。

- 先将男同学排好，方案数为 $n!$。
- 接下来将老师插入男同学的队伍中：
  - 若两名老师不相邻，则老师有 $n(n+1)$ 种选位置的方式，女同学需要在 $n+3$ 个位置种选择 m 个，因此有 $m!\binom{n+3}{m}$ 种选位置的方式。
  - 若两名老师相邻，则师有 $2(n+1)$ 种选位置的方式，一名女同学需要站在两个老师之间，剩下的女同学要在 $n+2$ 个位置中选择 $m-1$ 个，因此有 $m(m-1)!\binom{n+2}{m-1}$ 种选位置的方式。
- 因此答案为 $n!m!\left(\binom{n+3}{m} + \binom{n+2}{m-1}\right)$.

问题 (洛谷 P3223)

求将 n 名男同学，m 名女同学，两名老师排成一队，且任意两名女同学不相邻，任意两名老师不相邻的方案数。
数据范围：$1 \le n, m \le 2000$。

- 先将男同学排好，方案数为 $n!$。
- 接下来将老师插入男同学的队伍中：
  - 若两名老师不相邻，则老师有 $n(n+1)$ 种选位置的方式，女同学需要在 $n+3$ 个位置种选择 m 个，因此有 $m!\binom{n+3}{m}$ 种选位置的方式。
  - 若两名老师相邻，则师有 $2(n+1)$ 种选位置的方式，一名女同学需要站在两个老师之间，剩下的女同学要在 $n+2$ 个位置中选择 $m-1$ 个，因此有 $m(m-1)!\binom{n+2}{m-1}$ 种选位置的方式。
- 因此答案为 $n!m!\left(\binom{n+3}{m}+\binom{n+2}{m-1}\right)$.
- 时间复杂度 $O(n)$。

问题 (卡特兰数)

求在平面网格图上从 $(0,0)$ 走到 (n,n)，每一步只能向右或向上，且不能经过 $y=x+1$ 的方案数。
数据范围：$1 \le n \le 10^6$。

问题 (卡特兰数)

求在平面网格图上从 $(0,0)$ 走到 (n,n)，每一步只能向右或向上，且不能经过 $y=x+1$ 的方案数。
数据范围：$1 \le n \le 10^6$。

- 考虑用总方案数减去与 $y=x+1$ 相交的方案数。

问题（卡特兰数）

求在平面网格图上从 $(0,0)$ 走到 (n,n)，每一步只能向右或向上，且不能经过 $y=x+1$ 的方案数。

数据范围：$1 \le n \le 10^6$。

- 考虑用总方案数减去与 $y=x+1$ 相交的方案数。
- 对于每条经过 $y=x+1$ 的路径，作如下变换：
  - 将第一次相交之后的路径沿 $y=x+1$ 翻转；
  - 得到一条从 $(0,0)$ 走到 $(n-1,n+1)$ 的路径。
- 可以发现，上述变换构成双射。答案即为

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}.$$

问题 (卡特兰数)

求在平面网格图上从 $(0,0)$ 走到 (n,n)，每一步只能向右或向上，且不能经过 $y=x+1$ 的方案数。
数据范围：$1 \le n \le 10^6$。

- 考虑用总方案数减去与 $y=x+1$ 相交的方案数。
- 对于每条经过 $y=x+1$ 的路径，作如下变换：
  - 将第一次相交之后的路径沿 $y=x+1$ 翻转；
  - 得到一条从 $(0,0)$ 走到 $(n-1,n+1)$ 的路径。
- 可以发现，上述变换构成双射。答案即为

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}.$$

- 时间复杂度 $O(n)$。

问题

求在平面网格图上从 $(0,0)$ 走 k 步到 (n,m)，每一步可以向上下左右任意一个方向移动的方案数。

数据范围：$1 \le n, m, k \le 10^6$。

问题

求在平面网格图上从 $(0,0)$ 走 k 步到 (n,m)，每一步可以向上下左右任意一个方向移动的方案数。
数据范围：$1 \le n,m,k \le 10^6$。

- 考虑枚举在水平方向移动的次数 i：
  - 设向右 r 次，向左 l 次，则有 $r+l=i$ 且 $r-l=n$，可以解出 $r=(i+n)/2$。
  - 类似地，向上移动的次数为 $(k-i+m)/2$，答案即为

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\binom{n}{(n+i)/2}\binom{m}{(m+k-i)/2}.$$

、

- 进一步地，考虑分离两个方向：
  - 将坐标系旋转 $45°$，即作变换 $(x,y)\mapsto(x-y,x+y)$。
  - 此时每步都会使横纵坐标 ± 1，答案即为 $\binom{k}{(k+n-m)/2}\binom{k}{(k+n+m)/2}$.

问题

求在平面网格图上从 $(0,0)$ 走 k 步到 (n,m)，每一步可以向上下左右任意一个方向移动的方案数。
数据范围：$1 \le n,m,k \le 10^6$。

- 考虑枚举在水平方向移动的次数 i：
  - 设向右 r 次，向左 l 次，则有 $r+l=i$ 且 $r-l=n$，可以解出 $r=(i+n)/2$。
  - 类似地，向上移动的次数为 $(k-i+m)/2$，答案即为

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\binom{n}{(n+i)/2}\binom{m}{(m+k-i)/2}.$$

、

- 进一步地，考虑分离两个方向：
  - 将坐标系旋转 45°，即作变换 $(x,y)\mapsto(x-y,x+y)$。
  - 此时每步都会使横纵坐标 ± 1，答案即为 $\binom{k}{(k+n-m)/2}\binom{k}{(k+n+m)/2}$.
- 时间复杂度 $O(k)$。

问题 (洛谷 P3726)

甲抛掷 a 次硬币，乙抛掷 b 次硬币，求甲抛出正面朝上的次数更多的方案数。
数据范围：$1 \le a, b \le 10^{15}$，$0 \le a - b \le 10^4$。

问题 (洛谷 P3726)

甲抛掷 a 次硬币，乙抛掷 b 次硬币，求甲抛出正面朝上的次数更多的方案数。
数据范围：$1 \le a, b \le 10^{15}$，$0 \le a - b \le 10^4$。

- 先讨论 $a = b$ 的情况，可以构造一个双射：
  - 翻转所有硬币会得到一个结果相反的局面，即甲次数多与乙次数多一一对应。

问题 (洛谷 P3726)

甲抛掷 a 次硬币，乙抛掷 b 次硬币，求甲抛出正面朝上的次数更多的方案数。
数据范围：$1 \le a, b \le 10^{15}$，$0 \le a - b \le 10^4$。

- 先讨论 $a = b$ 的情况，可以构造一个双射：
  - 翻转所有硬币会得到一个结果相反的局面，即甲次数多与乙次数多一一对应。
- 由于总方案数为 2^{2a}，平局方案数为 $\sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i}^2 = \binom{2a}{a}$，
- 甲抛出正面朝上的次数更多的方案数即为 $\left(2^{2a} - \binom{2a}{a}\right)/2$。

问题 (洛谷 P3726)

甲抛掷 a 次硬币，乙抛掷 b 次硬币，求甲抛出正面朝上的次数更多的方案数。
数据范围：$1 \le a, b \le 10^{15}$，$0 \le a - b \le 10^4$。

- 先讨论 $a = b$ 的情况，可以构造一个双射：
  - 翻转所有硬币会得到一个结果相反的局面，即甲次数多与乙次数多一一对应。
- 由于总方案数为 2^{2a}，平局方案数为 $\sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i}^2 = \binom{2a}{a}$，
- 甲抛出正面朝上的次数更多的方案数即为 $\left(2^{2a} - \binom{2a}{a}\right)/2$。
- 再讨论 $a > b$ 的情况，可以构造类似的双射：
  - 翻转所有硬币会使乙次数多或平局会得到甲次数多的局面；
  - 于是只需要统计翻转前后都是甲次数多的方案数。

问题 (洛谷 P3726)

甲抛掷 a 次硬币，乙抛掷 b 次硬币，求甲抛出正面朝上的次数更多的方案数。
数据范围：$1 \le a, b \le 10^{15}$，$0 \le a - b \le 10^4$。

- 先讨论 $a = b$ 的情况，可以构造一个双射：
  - 翻转所有硬币会得到一个结果相反的局面，即甲次数多与乙次数多一一对应。
- 由于总方案数为 2^{2a}，平局方案数为 $\sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i}^2 = \binom{2a}{a}$，
- 甲抛出正面朝上的次数更多的方案数即为 $\left(2^{2a} - \binom{2a}{a}\right)/2$。
- 再讨论 $a > b$ 的情况，可以构造类似的双射：
  - 翻转所有硬币会使乙次数多或平局会得到甲次数多的局面；
  - 于是只需要统计翻转前后都是甲次数多的方案数。
- 枚举正面朝上的次数 i, j，
  - 需要满足 $i > j$ 且 $a - i > b - j$，即 $1 \le i - j \le a - b - 1$：

$$\sum_{d=1}^{a-b-1} \sum_{j=0}^{b} \binom{a}{j+d}\binom{b}{j} = \sum_{d=1}^{a-b-1} \binom{a+b}{d+b}.$$

问题 (洛谷 P3726)

甲抛掷 a 次硬币，乙抛掷 b 次硬币，求甲抛出正面朝上的次数更多的方案数。
数据范围：$1 \le a, b \le 10^{15}$，$0 \le a - b \le 10^4$。

- 先讨论 $a = b$ 的情况，可以构造一个双射：
  - 翻转所有硬币会得到一个结果相反的局面，即甲次数多与乙次数多一一对应。
- 由于总方案数为 2^{2a}，平局方案数为 $\sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i}^2 = \binom{2a}{a}$，
- 甲抛出正面朝上的次数更多的方案数即为 $\left(2^{2a} - \binom{2a}{a}\right)/2$。
- 再讨论 $a > b$ 的情况，可以构造类似的双射：
  - 翻转所有硬币会使乙次数多或平局会得到甲次数多的局面；
  - 于是只需要统计翻转前后都是甲次数多的方案数。
- 枚举正面朝上的次数 i, j，
  - 需要满足 $i > j$ 且 $a - i > b - j$，即 $1 \le i - j \le a - b - 1$：

$$\sum_{d=1}^{a-b-1} \sum_{j=0}^{b} \binom{a}{j+d} \binom{b}{j} = \sum_{d=1}^{a-b-1} \binom{a+b}{d+b}.$$

- 时间复杂度 $O(a - b)$。

容斥原理

- 给定集合 $S_1, \ldots, S_n$，则有：

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right| = \sum_{\varnothing \neq T \subseteq [n]} (-1)^{|T|-1} \left|\bigcap_{i \in T} S_i\right|.$$

容斥原理

- 给定集合 $S_1, \ldots, S_n$，则有：

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right| = \sum_{\varnothing \neq T \subseteq [n]} (-1)^{|T|-1} \left|\bigcap_{i \in T} S_i\right|.$$

- 证明可以通过对每个元素使用二项式定理计算其出现的次数得到。

容斥原理

- 给定集合 $S_1, \ldots, S_n$，则有:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right| = \sum_{\varnothing \neq T \subseteq [n]} (-1)^{|T|-1} \left|\bigcap_{i \in T} S_i\right|.$$

- 证明可以通过对每个元素使用二项式定理计算其出现的次数得到。
- 在部分问题中，枚举 T 的复杂度较高，需要将系数作为权重纳入计算。

问题（错排数）

求满足以下要求的排列 $[p_1, \ldots, p_n]$ 的数量：对于 $1 \le i \le n$，$p_i \ne i$。
数据范围：$1 \le n \le 10^6$。

问题（错排数）

求满足以下要求的排列 $[p_1, \ldots, p_n]$ 的数量：对于 $1 \le i \le n$，$p_i \ne i$。
数据范围：$1 \le n \le 10^6$。

- 记 S_i 为满足 $p_i = i$ 的排列构成的集合，答案即为 $n! - |\cup_{i=1}^{n} S_i|$。

问题（错排数）

求满足以下要求的排列 $[p_1, \ldots, p_n]$ 的数量：对于 $1 \le i \le n$，$p_i \ne i$。
数据范围：$1 \le n \le 10^6$。

- 记 S_i 为满足 $p_i = i$ 的排列构成的集合，答案即为 $n! - |\cup_{i=1}^{n} S_i|$。
- 使用容斥原理，枚举集合 $\varnothing \ne T \subseteq [n]$，此时 $|\cap_{i \in T} S_i| = (n - |T|)!$。

问题（错排数）

求满足以下要求的排列 $[p_1, \ldots, p_n]$ 的数量：对于 $1 \le i \le n$，$p_i \ne i$。
数据范围：$1 \le n \le 10^6$。

- 记 S_i 为满足 $p_i = i$ 的排列构成的集合，答案即为 $n! - |\cup_{i=1}^n S_i|$。
- 使用容斥原理，枚举集合 $\varnothing \ne T \subseteq [n]$，此时 $|\cap_{i \in T} S_i| = (n - |T|)!$。
- 枚举集合 T 的大小 i，答案即为

$$n! - \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i-1} (n-i)! = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)! = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

问题（错排数）

求满足以下要求的排列 $[p_1, \ldots, p_n]$ 的数量：对于 $1 \le i \le n$，$p_i \ne i$。
数据范围：$1 \le n \le 10^6$。

- 记 S_i 为满足 $p_i = i$ 的排列构成的集合，答案即为 $n! - |\cup_{i=1}^n S_i|$。
- 使用容斥原理，枚举集合 $\varnothing \ne T \subseteq [n]$，此时 $|\cap_{i \in T} S_i| = (n - |T|)!$。
- 枚举集合 T 的大小 i，答案即为

$$n! - \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i-1} (n-i)! = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)! = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

- 进一步地，可以得到错排数 D_n 的递推式：$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$。

问题（错排数）

求满足以下要求的排列 $[p_1, \ldots, p_n]$ 的数量：对于 $1 \le i \le n$，$p_i \ne i$。
数据范围：$1 \le n \le 10^6$。

- 记 S_i 为满足 $p_i = i$ 的排列构成的集合，答案即为 $n! - |\cup_{i=1}^{n} S_i|$。
- 使用容斥原理，枚举集合 $\varnothing \ne T \subseteq [n]$，此时 $|\cap_{i\in T} S_i| = (n - |T|)!$。
- 枚举集合 T 的大小 i，答案即为

$$n! - \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i-1} (n-i)! = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)! = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

- 进一步地，可以得到错排数 D_n 的递推式：$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$。
- 时间复杂度 $O(n)$。

问题

给定 $a_1, \ldots, a_m$，求方程 $x_1 + \cdots + x_m = n$ 满足以下条件的正整数解个数：

- 对于所有 $1 \leq i \leq m$，$x_i \leq a_i$。

数据范围：$1 \leq m \leq 20$，$1 \leq n \leq 10^6$。

问题

给定 $a_1, \ldots, a_m$，求方程 $x_1 + \cdots + x_m = n$ 满足以下条件的正整数解个数：

- 对于所有 $1 \le i \le m$，$x_i \le a_i$。

数据范围：$1 \le m \le 20$，$1 \le n \le 10^6$。

- 记 S_i 为满足 $x_i > a_i$ 的正整数解构成的集合，答案即为 $\binom{n}{m-1} - |\cup_{i=1}^{n} S_i|$。

问题

给定 $a_1, \dots, a_m$，求方程 $x_1 + \cdots + x_m = n$ 满足以下条件的正整数解个数：

- 对于所有 $1 \le i \le m$，$x_i \le a_i$。

数据范围：$1 \le m \le 20$，$1 \le n \le 10^6$。

- 记 S_i 为满足 $x_i > a_i$ 的正整数解构成的集合，答案即为 $\binom{n}{m-1} - |\cup_{i=1}^{n} S_i|$。
- 使用容斥原理，枚举集合 $\varnothing \ne T \subseteq [n]$，此时需要计算 $|\cap_{i \in T} S_i|$。

问题

给定 $a_1, \dots, a_m$，求方程 $x_1 + \cdots + x_m = n$ 满足以下条件的正整数解个数：

- 对于所有 $1 \le i \le m$，$x_i \le a_i$。

数据范围：$1 \le m \le 20$，$1 \le n \le 10^6$。

- 记 S_i 为满足 $x_i > a_i$ 的正整数解构成的集合，答案即为 $\binom{n}{m-1} - |\cup_{i=1}^{n} S_i|$。
- 使用容斥原理，枚举集合 $\varnothing \ne T \subseteq [n]$，此时需要计算 $|\cap_{i \in T} S_i|$。
- 对于所有 $i \in T$，作变换 $x_i \to x_i - a_i$，此时方程变为

$$x_1 + \cdots + x_m = n - \sum_{i \in T} a_i.$$

问题

给定 $a_1, \dots, a_m$，求方程 $x_1 + \cdots + x_m = n$ 满足以下条件的正整数解个数：

- 对于所有 $1 \le i \le m$，$x_i \le a_i$。

数据范围：$1 \le m \le 20$，$1 \le n \le 10^6$。

- 记 S_i 为满足 $x_i > a_i$ 的正整数解构成的集合，答案即为 $\binom{n}{m-1} - |\cup_{i=1}^{n} S_i|$。
- 使用容斥原理，枚举集合 $\varnothing \ne T \subseteq [n]$，此时需要计算 $|\cap_{i \in T} S_i|$。
- 对于所有 $i \in T$，作变换 $x_i \to x_i - a_i$，此时方程变为

$$x_1 + \cdots + x_m = n - \sum_{i \in T} a_i.$$

- 答案即为

$$\sum_{T \subseteq [n]} (-1)^{|T|} \binom{n - \sum_{i \in T} a_i}{m-1}.$$

问题

给定 $a_1, \dots, a_m$，求方程 $x_1 + \cdots + x_m = n$ 满足以下条件的正整数解个数：

- 对于所有 $1 \le i \le m$，$x_i \le a_i$。

数据范围：$1 \le m \le 20$，$1 \le n \le 10^6$。

- 记 S_i 为满足 $x_i > a_i$ 的正整数解构成的集合，答案即为 $\binom{n}{m-1} - |\cup_{i=1}^n S_i|$。
- 使用容斥原理，枚举集合 $\varnothing \ne T \subseteq [n]$，此时需要计算 $|\cap_{i \in T} S_i|$。
- 对于所有 $i \in T$，作变换 $x_i \to x_i - a_i$，此时方程变为

$$x_1 + \cdots + x_m = n - \sum_{i \in T} a_i.$$

- 答案即为

$$\sum_{T \subseteq [n]} (-1)^{|T|} \binom{n - \sum_{i \in T} a_i}{m-1}.$$

- 时间复杂度 $O(2^m)$。

问题 (洛谷 P3813)

给定一个 $h \times w$ 的矩阵求在矩阵中填入 $1 \sim m$，且满足 n 个限制的方案数，其中每个限制均为限定某个子矩阵的最大值。

数据范围：$1 \leq h, w, m \leq 10^4$，$1 \leq n \leq 10$。

问题 (洛谷 P3813)

给定一个 $h \times w$ 的矩阵求在矩阵中填入 $1 \sim m$，且满足 n 个限制的方案数，其中每个限制均为限定某个子矩阵的最大值。
数据范围：$1 \le h, w, m \le 10^4$，$1 \le n \le 10$。

- 如果直接容斥，并不能快速计算最大值不为给定值的方案数。

问题 (洛谷 P3813)

给定一个 $h \times w$ 的矩阵求在矩阵中填入 $1 \sim m$，且满足 n 个限制的方案数，其中每个限制均为限定某个子矩阵的最大值。
数据范围：$1 \leq h, w, m \leq 10^4$，$1 \leq n \leq 10$。

- 如果直接容斥，并不能快速计算最大值不为给定值的方案数。
- 注意到限定所有数不超过某个值是容易的，可以按照如下方式容斥：

问题 (洛谷 P3813)

给定一个 $h \times w$ 的矩阵求在矩阵中填入 $1 \sim m$，且满足 n 个限制的方案数，其中每个限制均为限定某个子矩阵的最大值。
数据范围：$1 \le h, w, m \le 10^4$，$1 \le n \le 10$。

- 如果直接容斥，并不能快速计算最大值不为给定值的方案数。
- 注意到限定所有数不超过某个值是容易的，可以按照如下方式容斥：
  - 记第 i 个子矩形的限制为 v_i，实际最大值为 m_i；
  - 首先令全集为满足所有 $m_i \le v_i$ 的方案集合；
  - 然后令 S_i 为满足 $m_i < v_i$ 的方案集合。

问题 (洛谷 P3813)

给定一个 $h \times w$ 的矩阵求在矩阵中填入 $1 \sim m$，且满足 n 个限制的方案数，其中每个限制均为限定某个子矩阵的最大值。
数据范围：$1 \le h, w, m \le 10^4$，$1 \le n \le 10$。

- 如果直接容斥，并不能快速计算最大值不为给定值的方案数。
- 注意到限定所有数不超过某个值是容易的，可以按照如下方式容斥：
  - 记第 i 个子矩形的限制为 v_i，实际最大值为 m_i；
  - 首先令全集为满足所有 $m_i \le v_i$ 的方案集合；
  - 然后令 S_i 为满足 $m_i < v_i$ 的方案集合。
- 此时 $|\bigcap_{i \in T} S_i|$ 的限制为若干条某个区域均不超过某个值的形式。

问题 (洛谷 P3813)

给定一个 $h \times w$ 的矩阵求在矩阵中填入 $1 \sim m$，且满足 n 个限制的方案数，其中每个限制均为限定某个子矩阵的最大值。

数据范围：$1 \leq h, w, m \leq 10^4$，$1 \leq n \leq 10$。

- 如果直接容斥，并不能快速计算最大值不为给定值的方案数。
- 注意到限定所有数不超过某个值是容易的，可以按照如下方式容斥：
  - 记第 i 个子矩形的限制为 v_i，实际最大值为 m_i；
  - 首先令全集为满足所有 $m_i \leq v_i$ 的方案集合；
  - 然后令 S_i 为满足 $m_i < v_i$ 的方案集合。
- 此时 $|\bigcap_{i \in T} S_i|$ 的限制为若干条某个区域均不超过某个值的形式。
- 直接应用乘法原理，计算每一个区域的方案数的乘积即可。

问题 (洛谷 P3813)

给定一个 $h \times w$ 的矩阵求在矩阵中填入 $1 \sim m$，且满足 n 个限制的方案数，其中每个限制均为限定某个子矩阵的最大值。
数据范围：$1 \le h, w, m \le 10^4$，$1 \le n \le 10$。

- 如果直接容斥，并不能快速计算最大值不为给定值的方案数。
- 注意到限定所有数不超过某个值是容易的，可以按照如下方式容斥：
  - 记第 i 个子矩形的限制为 v_i，实际最大值为 m_i；
  - 首先令全集为满足所有 $m_i \le v_i$ 的方案集合；
  - 然后令 S_i 为满足 $m_i < v_i$ 的方案集合。
- 此时 $|\cap_{i \in T} S_i|$ 的限制为若干条某个区域均不超过某个值的形式。
- 直接应用乘法原理，计算每一个区域的方案数的乘积即可。
- 时间复杂度 $O(2^n n^3)$。

Min-Max 容斥

- 在容斥原理中，考虑给集合赋予一个偏序关系，则有：

$$\max_{i=1}^{n} S_i = \sum_{\varnothing \neq T \subseteq [n]} (-1)^{|T|-1} \min_{i \in T} S_i.$$

Min-Max 容斥

- 在容斥原理中，考虑给集合赋予一个偏序关系，则有：

$$\max_{i=1}^{n} S_i = \sum_{\varnothing \neq T \subseteq [n]} (-1)^{|T|-1} \min_{i \in T} S_i.$$

- 记 $\max(S), \min(S)$ 分别表示集合 S 中的最大值与最小值，则有：

$$\max(S) = \sum_{\varnothing \neq T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min(T).$$

Min-Max 容斥

- 在容斥原理中，考虑给集合赋予一个偏序关系，则有：

$$\max_{i=1}^{n} S_i = \sum_{\varnothing \neq T \subseteq [n]} (-1)^{|T|-1} \min_{i \in T} S_i.$$

- 记 $\max(S), \min(S)$ 分别表示集合 S 中的最大值与最小值，则有：

$$\max(S) = \sum_{\varnothing \neq T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min(T).$$

扩展 Min-Max 容斥

- 进一步地，设 $\max_k(S)$ 表示集合 S 中的第 k 大值，则有：

$$\max_k(S) = \sum_{T \subseteq S, |T| \geq k} (-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1} \min(T).$$

Min-Max 容斥的期望形式

- 上述两个公式在期望意义下亦成立，即有：

$$\mathbb{E}[\max(S)] = \sum_{\varnothing \neq T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \mathbb{E}[\min(T)],$$

$$\mathbb{E}[\max_k(S)] = \sum_{T \subseteq S, |T| \geq k} (-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1} \mathbb{E}[\min(T)].$$

问题

有一个随机数生成器，每次会按照 $p_1, \ldots, p_n$ 的概率分布生成 $1 \sim n$ 中的一个数。求 $1 \sim n$ 都被至少生成过一次的期望次数。

数据范围：$1 \le n \le 20$。

问题

有一个随机数生成器，每次会按照 $p_1, \ldots, p_n$ 的概率分布生成 $1 \sim n$ 中的一个数。求 $1 \sim n$ 都被至少生成过一次的期望次数。
数据范围：$1 \le n \le 20$。

- 记 t_i 表示第一次生成 i 的时间，答案即为 $\mathbb{E}[\max(t_1, \ldots, t_n)]$。

问题

有一个随机数生成器，每次会按照 $p_1, \ldots, p_n$ 的概率分布生成 $1 \sim n$ 中的一个数。求 $1 \sim n$ 都被至少生成过一次的期望次数。
数据范围：$1 \le n \le 20$。

- 记 t_i 表示第一次生成 i 的时间，答案即为 $\mathbb{E}[\max(t_1, \ldots, t_n)]$。
- 使用 Min-Max 容斥的期望形式，枚举 $\varnothing \ne T \subseteq [n]$，计算 $\mathbb{E}[\min_{i \in T} t_i]$。

问题

有一个随机数生成器，每次会按照 $p_1, \ldots, p_n$ 的概率分布生成 $1 \sim n$ 中的一个数。求 $1 \sim n$ 都被至少生成过一次的期望次数。
数据范围：$1 \le n \le 20$。

- 记 t_i 表示第一次生成 i 的时间，答案即为 $\mathbb{E}[\max(t_1, \ldots, t_n)]$。
- 使用 Min-Max 容斥的期望形式，枚举 $\varnothing \ne T \subseteq [n]$，计算 $\mathbb{E}[\min_{i \in T} t_i]$。
- 即只需求出生成任一 T 中元素的期望时间。

问题

有一个随机数生成器，每次会按照 $p_1, \ldots, p_n$ 的概率分布生成 $1 \sim n$ 中的一个数。求 $1 \sim n$ 都被至少生成过一次的期望次数。
数据范围：$1 \leq n \leq 20$。

- 记 t_i 表示第一次生成 i 的时间，答案即为 $\mathbb{E}[\max(t_1, \ldots, t_n)]$。
- 使用 Min-Max 容斥的期望形式，枚举 $\varnothing \neq T \subseteq [n]$，计算 $\mathbb{E}[\min_{i \in T} t_i]$。
- 即只需求出生成任一 T 中元素的期望时间。
- 由于生成概率为 $\sum_{i \in T} p_i$，对应的期望时间即为 $\left(\sum_{i \in T} p_i\right)^{-1}$。

问题

有一个随机数生成器，每次会按照 $p_1, \ldots, p_n$ 的概率分布生成 $1 \sim n$ 中的一个数。求 $1 \sim n$ 都被至少生成过一次的期望次数。
数据范围：$1 \le n \le 20$。

- 记 t_i 表示第一次生成 i 的时间，答案即为 $\mathbb{E}[\max(t_1, \ldots, t_n)]$。
- 使用 Min-Max 容斥的期望形式，枚举 $\varnothing \ne T \subseteq [n]$，计算 $\mathbb{E}[\min_{i \in T} t_i]$。
- 即只需求出生成任一 T 中元素的期望时间。
- 由于生成概率为 $\sum_{i \in T} p_i$，对应的期望时间即为 $\left(\sum_{i \in T} p_i\right)^{-1}$。
- 时间复杂度 $O(2^n)$。

反演

- 更一般地，对于定义在集合上的函数 $f, g : 2^{[n]} \mapsto \mathbb{F}_p$：
  - 若 f, g 满足：

$$f(S) = \sum_{T \subseteq S} g(T),$$

反演

- 更一般地，对于定义在集合上的函数 $f, g : 2^{[n]} \mapsto \mathbb{F}_p$:
  - 若 f, g 满足:

$$f(S) = \sum_{T \subseteq S} g(T),$$

  - 则可以得到 f, g 的另一关系式:

$$g(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} f(T).$$

反演

- 更一般地，对于定义在集合上的函数 $f, g : 2^{[n]} \mapsto \mathbb{F}_p$：
  - 若 f, g 满足：

$$f(S) = \sum_{T \subseteq S} g(T),$$

  - 则可以得到 f, g 的另一关系式：

$$g(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} f(T).$$

- 形式化地，若函数 $f, g : D \to M$ 满足：

$$f(m) = \sum_{d} a_{m,d} g(d),$$

- 则反演一般指其逆向过程：

$$g(d) = \sum_{m} b_{d,m} f(m).$$

- 前缀和与差分：$f(n)=\sum_{k\le n} g(k) \iff g(n)=f(n)-f(n-1)$.

- 前缀和与差分: $f(n)=\sum_{k\le n} g(k) \iff g(n)=f(n)-f(n-1)$.
- 子集反演:

$$f(S)=\sum_{T\subseteq S} g(T) \iff g(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S|-|T|} f(T).$$

- 前缀和与差分：$f(n) = \sum_{k \leq n} g(k) \iff g(n) = f(n) - f(n-1)$.
- 子集反演：

$$f(S) = \sum_{T \subseteq S} g(T) \iff g(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} f(T).$$

- 莫比乌斯反演：

$$f(n) = \sum_{d \mid n} g(d) \iff g(n) = \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d).$$

- 前缀和与差分: $f(n)=\sum_{k\le n} g(k) \iff g(n)=f(n)-f(n-1)$.
- 子集反演:

$$f(S)=\sum_{T\subseteq S} g(T) \iff g(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S|-|T|} f(T).$$

- 莫比乌斯反演:

$$f(n)=\sum_{d\mid n} g(d) \iff g(n)=\sum_{d\mid n}\mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d).$$

- 二项式反演:

$$f(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} g(k) \iff g(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k} f(k).$$

- 单位根反演（离散傅里叶变换）:

$$f(m)=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_n^{mk}g(k) \iff g(m)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_n^{-mk}f(k).$$

问题 (洛谷 P6076)

给定 $n \times m$ 的矩形与 c 种颜色，每个位置可以染任意一种颜色或不染色。求每行每列都有至少一格被染色，且每种颜色都出现过的染色方案数。

数据范围：$1 \leq n, m, c \leq 400$。

问题 (洛谷 P6076)

给定 $n \times m$ 的矩形与 c 种颜色，每个位置可以染任意一种颜色或不染色。求每行每列都有至少一格被染色，且每种颜色都出现过的染色方案数。
数据范围：$1 \leq n, m, c \leq 400$。

- 记 $f(n, m, c)$ 表示用 c 种颜色染 n 行 m 列的方案数，
- 记 $g(n, m, c)$ 表示恰好用 c 种颜色染恰好 n 行恰好 m 列的方案数。

问题 (洛谷 P6076)

给定 $n \times m$ 的矩形与 c 种颜色，每个位置可以染任意一种颜色或不染色。求每行每列都有至少一格被染色，且每种颜色都出现过的染色方案数。
数据范围：$1 \leq n, m, c \leq 400$。

- 记 $f(n, m, c)$ 表示用 c 种颜色染 n 行 m 列的方案数，
- 记 $g(n, m, c)$ 表示恰好用 c 种颜色染恰好 n 行恰好 m 列的方案数。
- 由 g 不难计算出 f：

$$f(n, m, c) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{c}\binom{n}{i}\binom{m}{j}\binom{c}{k}g(i, j, k).$$

问题 (洛谷 P6076)

给定 $n \times m$ 的矩形与 c 种颜色，每个位置可以染任意一种颜色或不染色。求每行每列都有至少一格被染色，且每种颜色都出现过的染色方案数。
数据范围：$1 \le n, m, c \le 400$。

- 记 $f(n,m,c)$ 表示用 c 种颜色染 n 行 m 列的方案数，
- 记 $g(n,m,c)$ 表示恰好用 c 种颜色染恰好 n 行恰好 m 列的方案数。
- 由 g 不难计算出 f：

$$f(n,m,c) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{c}\binom{n}{i}\binom{m}{j}\binom{c}{k} g(i,j,k).$$

- 对三次求和均使用二项式反演即可得到答案：

$$g(n,m,c) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{c}(-1)^{n+m+c-i-j-k}\binom{n}{i}\binom{m}{j}\binom{c}{k} k^{ij}.$$

问题 (洛谷 P6076)

给定 $n \times m$ 的矩形与 c 种颜色，每个位置可以染任意一种颜色或不染色。求每行每列都有至少一格被染色，且每种颜色都出现过的染色方案数。
数据范围：$1 \le n, m, c \le 400$。

- 记 $f(n,m,c)$ 表示用 c 种颜色染 n 行 m 列的方案数，
- 记 $g(n,m,c)$ 表示恰好用 c 种颜色染恰好 n 行恰好 m 列的方案数。
- 由 g 不难计算出 f：

$$f(n,m,c) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{c}\binom{n}{i}\binom{m}{j}\binom{c}{k}g(i,j,k).$$

- 对三次求和均使用二项式反演即可得到答案：

$$g(n,m,c) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{c}(-1)^{n+m+c-i-j-k}\binom{n}{i}\binom{m}{j}\binom{c}{k}k^{ij}.$$

- 时间复杂度 $O(nmc)$。

基本概念

- 对于有单位元的交换环 R:
- 定义 f 为 R 上的**多项式**当且仅当:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} f_i x^i \ (f_0, f_1, \ldots, f_n \in R, f_n \neq 0).$$

- 其中 n 称作 f 的**度数**，记作 $\deg f$。记 f 的 i 次项系数为 $[x^i]f = f_i$。
- 定义 R 上的**多项式环** $R[x]$ 为所有 R 上的多项式构成的集合。
- 定义 f 为 R 上的**形式幂级数**当且仅当:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{+\infty} f_i x^i \ (f_0, f_1, \cdots \in R).$$

- 定义 R 上的**形式幂级数环** $R[[x]]$ 为所有 R 上的形式幂级数构成的集合。
- 注意: x 仅为**形式符号**，即对系数位置的标识符，没有实际意义。

基本运算

- 记形式幂级数 $f(x)=\sum_{i=0}^{+\infty} f_i x^i$，$g(x)=\sum_{i=0}^{+\infty} g_i x^i$：

基本运算

- 记形式幂级数 $f(x)=\sum_{i=0}^{+\infty} f_i x^i$，$g(x)=\sum_{i=0}^{+\infty} g_i x^i$：
- 定义形式幂级数的加减法为：

$$f(x)\pm g(x)=\sum_{i=0}^{+\infty}(f_i\pm g_i)x^i.$$

基本运算

- 记形式幂级数 $f(x)=\sum_{i=0}^{+\infty} f_i x^i$，$g(x)=\sum_{i=0}^{+\infty} g_i x^i$：
- 定义形式幂级数的加减法为：

$$f(x) \pm g(x)=\sum_{i=0}^{+\infty}(f_i \pm g_i)x^i.$$

- 定义形式幂级数的乘法（卷积）为：

$$f(x)\cdot g(x)=\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{i} f_j g_{i-j}\right)x^i.$$

基本运算

- 记形式幂级数 $f(x)=\sum_{i=0}^{+\infty} f_i x^i$，$g(x)=\sum_{i=0}^{+\infty} g_i x^i$：
- 定义形式幂级数的加减法为：

$$f(x)\pm g(x)=\sum_{i=0}^{+\infty}(f_i\pm g_i)x^i.$$

- 定义形式幂级数的乘法（卷积）为：

$$f(x)\cdot g(x)=\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{i} f_j g_{i-j}\right)x^i.$$

- 根据形式幂级数的乘法可以定义形式幂级数的乘法逆元：
  - 若 $f_0\neq 0$，则存在唯一的乘法逆元 f^{-1} 满足：

$$f\cdot f^{-1}=f^{-1}\cdot f=1.$$

基本运算

- 定义形式幂级数的复合为:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} f_i g^i(x).$$

  - 注意: $f \circ g$ 存在当且仅当 $f \in R[x]$ 或 $g_0 = 0$。

基本运算

- 定义形式幂级数的复合为:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} f_i g^i(x).$$

  - 注意: $f \circ g$ 存在当且仅当 $f \in R[x]$ 或 $g_0 = 0$。

- 定义形式幂级数的导数为:

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} i f_i x^{i-1}.$$

基本运算

- 定义形式幂级数的复合为:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} f_i g^i(x).$$

  - 注意: $f \circ g$ 存在当且仅当 $f \in R[x]$ 或 $g_0 = 0$。

- 定义形式幂级数的导数为:

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} i f_i x^{i-1}.$$

- 定义形式幂级数的不定积分为:

$$\int f(x) \mathrm{d}x = c + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{f_{i-1}}{i} x^i.$$

常见的幂级数展开式

$$\exp(x) = e^x = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots,$$

$$(1+x)^a = \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{a}{i} x^i = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{6}x^3 + \dots.$$

多项式带余除法

- 对于欧几里得整环 R，可以定义 $R[x]$ 上的带余除法：
- 对于多项式 $f, g \in R[x]$，存在唯一的 $q, r \in R[x]$ 满足：

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) \ (\deg r < \deg g).$$

- 称 $q(x)$ 为 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的**商**，$r(x)$ 为 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的**余数**。

多项式的系数表示与点值表示

- 对于 n 次多项式 $f(x)$，只需要 $n+1$ 个点值就可以将其确定：

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_n) = y_n.$$

多项式的系数表示与点值表示

- 对于 n 次多项式 $f(x)$，只需要 $n+1$ 个点值就可以将其确定：

$$f(x_0)=y_0, f(x_1)=y_1, \ldots, f(x_n)=y_n.$$

- 称由系数表示得到点值表示的过程为**求值**，
- 称由点值表示得到系数表示的过程为**插值**。

多项式的系数表示与点值表示

- 对于 n 次多项式 $f(x)$，只需要 $n+1$ 个点值就可以将其确定：

$$f(x_0)=y_0, f(x_1)=y_1, \ldots, f(x_n)=y_n.$$

- 称由系数表示得到点值表示的过程为**求值**，
- 称由点值表示得到系数表示的过程为**插值**。
- 拉格朗日插值公式：

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j\neq i} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}.$$

问题（自然数幂和）

给定 n, k，求 $\sum_{i=1}^{n} i^k$。

数据范围：$1 \le n \le 10^9$，$1 \le k \le 10^6$。

问题（自然数幂和）

给定 n, k，求 $\sum_{i=1}^{n} i^k$。
数据范围：$1 \le n \le 10^9$，$1 \le k \le 10^6$。

- 记 $F_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k$，则有：

$$F_0(n) = n, F_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}, F_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

问题（自然数幂和）

给定 n, k，求 $\sum_{i=1}^{n} i^k$。
数据范围：$1 \le n \le 10^9$，$1 \le k \le 10^6$。

- 记 $F_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k$，则有：

$$F_0(n) = n, F_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}, F_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- 可以猜想 $F_k(n)$ 是关于 n 的 $k+1$ 次多项式。

- 根据

$$(n+1)^{k+1}-n^{k+1}=\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}n^i,$$

$$(n+1)^{k+1}-1=\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}\sum_{j=1}^{n}j^i=\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}F_i(n).$$

- 根据

$$(n+1)^{k+1}-n^{k+1}=\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}n^i,$$

$$(n+1)^{k+1}-1=\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}\sum_{j=1}^{n}j^i=\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}F_i(n).$$

- 因此可以归纳证明 $F_k(n)$ 是关于 n 的 $k+1$ 次多项式。

- 根据

$$(n+1)^{k+1} - n^{k+1} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} n^i,$$

$$(n+1)^{k+1} - 1 = \sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} \sum_{j=1}^{n} j^i = \sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} F_i(n).$$

- 因此可以归纳证明 $F_k(n)$ 是关于 n 的 $k+1$ 次多项式。
- 首先计算 $1, 2, \ldots, k+1$ 处的点值，然后使用拉格朗日插值公式。

- 根据

$$(n+1)^{k+1} - n^{k+1} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} n^i,$$

$$(n+1)^{k+1} - 1 = \sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} \sum_{j=1}^{n} j^i = \sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} F_i(n).$$

- 因此可以归纳证明 $F_k(n)$ 是关于 n 的 $k+1$ 次多项式。
- 首先计算 $1, 2, \ldots, k+1$ 处的点值，然后使用拉格朗日插值公式。
- 只需要快速计算 $\prod_{j \neq i} \frac{n-j}{i-j}$：
  - 分子可以预处理前后缀乘积 $\prod_{j<i}(n-j)$ 与 $\prod_{j>i}(n-j)$；
  - 分母是 $(i-1)!(k+1-i)!(-1)^{k+1-i}$，只需要预处理阶乘。
- 时间复杂度 $O(k \log k)$。

问题 (洛谷 P4463)

求 $1 \sim m$ 中选 n 个互不相同的数的乘积之和。

数据范围：$1 \leq n \leq 500$，$n \leq m \leq 10^9$。

问题 (洛谷 P4463)

求 $1 \sim m$ 中选 n 个互不相同的数的乘积之和。

数据范围：$1 \leq n \leq 500$，$n \leq m \leq 10^9$。

- 考虑动态规划，记 $f_{i,j}$ 表示 $1 \sim i$ 中选 j 个不同数的乘积之和。

问题 (洛谷 P4463)

求 $1 \sim m$ 中选 n 个互不相同的数的乘积之和。
数据范围：$1 \leq n \leq 500$，$n \leq m \leq 10^9$。

- 考虑动态规划，记 $f_{i,j}$ 表示 $1 \sim i$ 中选 j 个不同数的乘积之和。
- 由于 i 范围较大，尝试证明固定 j 时 $f_{i,j}$ 是关于 i 的多项式。

问题 (洛谷 P4463)

求 $1 \sim m$ 中选 n 个互不相同的数的乘积之和。
数据范围：$1 \le n \le 500$，$n \le m \le 10^9$。

- 考虑动态规划，记 $f_{i,j}$ 表示 $1 \sim i$ 中选 j 个不同数的乘积之和。
- 由于 i 范围较大，尝试证明固定 j 时 $f_{i,j}$ 是关于 i 的多项式。
- 记 $F_j(i) = f_{i,j}$，根据转移可以得到：

$$F_j(i) = \sum_{k=0}^{i} kF_{j-1}(k-1).$$

问题 (洛谷 P4463)

求 $1 \sim m$ 中选 n 个互不相同的数的乘积之和。
数据范围：$1 \le n \le 500$，$n \le m \le 10^9$。

- 考虑动态规划，记 $f_{i,j}$ 表示 $1 \sim i$ 中选 j 个不同数的乘积之和。
- 由于 i 范围较大，尝试证明固定 j 时 $f_{i,j}$ 是关于 i 的多项式。
- 记 $F_j(i) = f_{i,j}$，根据转移可以得到：

$$F_j(i) = \sum_{k=0}^{i} kF_{j-1}(k-1).$$

- 因此可以归纳证明 F_j 是关于 i 的 $2j$ 次多项式。

问题 (洛谷 P4463)

求 $1 \sim m$ 中选 n 个互不相同的数的乘积之和。
数据范围：$1 \le n \le 500$，$n \le m \le 10^9$。

- 考虑动态规划，记 $f_{i,j}$ 表示 $1 \sim i$ 中选 j 个不同数的乘积之和。
- 由于 i 范围较大，尝试证明固定 j 时 $f_{i,j}$ 是关于 i 的多项式。
- 记 $F_j(i) = f_{i,j}$，根据转移可以得到：

$$F_j(i) = \sum_{k=0}^{i} kF_{j-1}(k-1).$$

- 因此可以归纳证明 F_j 是关于 i 的 $2j$ 次多项式。
- 暴力 DP 求出 F_n 的点值，然后使用拉格朗日插值求出 $F_n(m)$ 即可。

问题 (洛谷 P4463)

求 $1 \sim m$ 中选 n 个互不相同的数的乘积之和。
数据范围：$1 \le n \le 500$，$n \le m \le 10^9$。

- 考虑动态规划，记 $f_{i,j}$ 表示 $1 \sim i$ 中选 j 个不同数的乘积之和。
- 由于 i 范围较大，尝试证明固定 j 时 $f_{i,j}$ 是关于 i 的多项式。
- 记 $F_j(i) = f_{i,j}$，根据转移可以得到：

$$F_j(i) = \sum_{k=0}^{i} kF_{j-1}(k-1).$$

- 因此可以归纳证明 F_j 是关于 i 的 $2j$ 次多项式。
- 暴力 DP 求出 F_n 的点值，然后使用拉格朗日插值求出 $F_n(m)$ 即可。
- 时间复杂度 $O(n^2)$。

多项式操作

- 考虑多项式 f, g 在 $\bmod x^n$ 意义下的运算:

多项式操作

- 考虑多项式 f, g 在 $\bmod x^n$ 意义下的运算:
- 计算 $f \pm g, f', \int f \mathrm{d}x$ 的复杂度均为 $O(n)$。

多项式操作

- 考虑多项式 f, g 在 $\bmod x^n$ 意义下的运算:
- 计算 $f \pm g, f', \int f\mathrm{d}x$ 的复杂度均为 $O(n)$。
- 直接计算 fg 的复杂度为 $O(n^2)$。

多项式操作

- 考虑多项式 f, g 在 $\bmod x^n$ 意义下的运算：
- 计算 $f \pm g, f', \int f \mathrm{d}x$ 的复杂度均为 $O(n)$。
- 直接计算 fg 的复杂度为 $O(n^2)$。
- 将 $g = f^{-1}$ 按定义展开，可以得到计算 g 的递推式，复杂度为 $O(n^2)$：

$$\sum_{i=0}^{n} g_i f_{n-i} = 1,$$

$$g_0 = \frac{1}{f_0}, g_n = -\frac{1}{f_0} \sum_{i=0}^{n-1} g_i f_{n-k}.$$

多项式操作

- 对 $g = \exp f$ 求导，可以得到计算 g 的递推式，复杂度为 $O(n^2)$：

$$g' = f'g,$$

$$g_0 = \exp f_0, g_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)g_i f_{n-i}.$$

多项式操作

- 对 $g=\exp f$ 求导，可以得到计算 g 的递推式，复杂度为 $O(n^2)$：

$$g'=f'g,$$

$$g_0=\exp f_0, g_n=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)g_i f_{n-i}.$$

- 对于 $g=\ln f$，可以使用求逆、求导与积分得到，复杂度为 $O(n^2)$：

$$g=\int g'\mathrm{d}x=\int \frac{f'}{f}\mathrm{d}x.$$

多项式操作

- 对于 $g = f^k$:

多项式操作

- 对于 $g = f^k$:
  - 直接快速幂的复杂度为 $O(n^2 \log k)$;

多项式操作

- 对于 $g = f^k$:
  - 直接快速幂的复杂度为 $O(n^2 \log k)$;
  - 转化为 $g = \exp(k \ln f)$ 的复杂度为 $O(n^2)$;

多项式操作

- 对于 $g = f^k$:
  - 直接快速幂的复杂度为 $O(n^2 \log k)$;
  - 转化为 $g = \exp(k \ln f)$ 的复杂度为 $O(n^2)$;
  - 利用求导可以得到递推式:

$$g' = kf^{k-1}f' \implies g'f = kf'g,$$

$$g_0 = f_0^k, g_n = \frac{1}{nf_0}\sum_{i=0}^{n-1}(k(n-i)-i)g_i f_{n-i}.$$

多项式操作

- 对于 $g = f^k$:
  - 直接快速幂的复杂度为 $O(n^2 \log k)$;
  - 转化为 $g = \exp(k \ln f)$ 的复杂度为 $O(n^2)$;
  - 利用求导可以得到递推式:

$$g' = kf^{k-1}f' \implies g'f = kf'g,$$

$$g_0 = f_0^k, g_n = \frac{1}{nf_0}\sum_{i=0}^{n-1}(k(n-i)-i)g_i f_{n-i}.$$

  - 记 f 的非零项数为 m，则复杂度为 $O(nm)$。

生成函数

- 对于数列 $[f_0, f_1, \dots]$:

生成函数

- 对于数列 $[f_0, f_1, \ldots]$:
  - 定义其**普通型生成函数**（OGF）为:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} f_i x^i.$$

生成函数

- 对于数列 $[f_0, f_1, \ldots]$:
  - 定义其**普通型生成函数**（OGF）为:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} f_i x^i.$$

  - 定义其**指数型生成函数**（EGF）为:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{f_i}{i!} x^i.$$

生成函数

- 对于数列 $[f_0, f_1, \ldots]$:
  - 定义其**普通型生成函数**（OGF）为:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} f_i x^i.$$

  - 定义其**指数型生成函数**（EGF）为:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{f_i}{i!} x^i.$$

- 生成函数将数列转化为形式幂级数，从而可以用代数方法解决组合问题。

问题 (Atcoder Dwango Programming Contest V, Task E)

给定序列 $[a_1, \ldots, a_n]$，定义置换 p 的价值 $f(p)$ 为所有轮换中最小的 a_i 的乘积。定义 b_i 为有 i 个轮换的所有置换 p 的 $f(p)$ 之和，求 $\gcd(b_1, \ldots, b_n)$。

数据范围：$1 \leq n \leq 10^5$，$1 \leq a_i \leq 10^9$。

问题 (Atcoder Dwango Programming Contest V, Task E)

给定序列 $[a_1, \ldots, a_n]$，定义置换 p 的价值 $f(p)$ 为所有轮换中最小的 a_i 的乘积。定义 b_i 为有 i 个轮换的所有置换 p 的 $f(p)$ 之和，求 $\gcd(b_1, \ldots, b_n)$。
数据范围：$1 \le n \le 10^5$，$1 \le a_i \le 10^9$。

- 为方便处理最小值，首先将序列从小到大排序，然后考虑动态规划：

问题 (Atcoder Dwango Programming Contest V, Task E)

给定序列 $[a_1, \ldots, a_n]$，定义置换 p 的价值 $f(p)$ 为所有轮换中最小的 a_i 的乘积。定义 b_i 为有 i 个轮换的所有置换 p 的 $f(p)$ 之和，求 $\gcd(b_1, \ldots, b_n)$。
数据范围：$1 \le n \le 10^5$，$1 \le a_i \le 10^9$。

- 为方便处理最小值，首先将序列从小到大排序，然后考虑动态规划：
- 记 $f_{i,j}$ 表示前 i 个数划分为 j 个轮换的价值之和，则转移为：

$$f_{i,j} = a_i f_{i-1,j-1} + (i-1) f_{i-1,j}.$$

- 考虑 $f_{i,j}$ 的生成函数 $F_i(x)$，有 $F_i(x) = a_i x F_{i-1}(x) + (i-1)F_{i-1}(x)$。

- 考虑 $f_{i,j}$ 的生成函数 $F_i(x)$，有 $F_i(x) = a_i x F_{i-1}(x) + (i-1)F_{i-1}(x)$。
- 于是有 $F_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(a_i x + i - 1)$，答案即为

$$\gcd([x^1]F_n(x), \dots, [x^n]F_n(x)) = \prod_{i=1}^{n} \gcd(a_i, i-1).$$

- 考虑 $f_{i,j}$ 的生成函数 $F_i(x)$，有 $F_i(x) = a_i x F_{i-1}(x) + (i-1)F_{i-1}(x)$。
- 于是有 $F_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(a_i x + i - 1)$，答案即为

$$\gcd([x^1]F_n(x), \ldots, [x^n]F_n(x)) = \prod_{i=1}^{n} \gcd(a_i, i-1).$$

- 时间复杂度 $O(n \log \max\{a_i\})$。

问题 (洛谷 P3746)

给定 n,k,r，求：

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\binom{nk}{ik+r}.$$

数据范围：$1\le n\le 10^9$，$0\le r<k\le 50$。

问题 (洛谷 P3746)

给定 n,k,r，求:

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\binom{nk}{ik+r}.$$

数据范围: $1 \le n \le 10^9$，$0 \le r < k \le 50$。

- 根据二项式定理，原式即为:

$$\sum_{i=0}^{+\infty}[x^{ik+r}](1+x)^{nk}.$$

问题 (洛谷 P3746)

给定 n, k, r，求：

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \binom{nk}{ik+r}.$$

数据范围：$1 \leq n \leq 10^9$，$0 \leq r < k \leq 50$。

- 根据二项式定理，原式即为：

$$\sum_{i=0}^{+\infty} [x^{ik+r}](1+x)^{nk}.$$

- 首先改写指标，将 $ik+r$ 转化为条件 $i \bmod k = r$：

$$\sum_{i=0}^{+\infty} [i \bmod k = r][x^i](1+x)^{nk}$$

- 求所有模 k 为 r 的项之和，相当于不区分 x^k 与 1。
- 于是只需要考虑在模 x^k-1 意义下的多项式，即

$$\sum_{i=0}^{+\infty}[i \bmod k = r][x^i](1+x)^{nk} = [x^r]\left((1+x)^{nk} \bmod (x^k-1)\right).$$

- 求所有模 k 为 r 的项之和，相当于不区分 x^k 与 1。
- 于是只需要考虑在模 x^k-1 意义下的多项式，即

$$\sum_{i=0}^{+\infty}[i \bmod k = r][x^i](1+x)^{nk} = [x^r]\left((1+x)^{nk} \bmod (x^k-1)\right).$$

- 在多项式快速幂的同时取模即可。

- 求所有模 k 为 r 的项之和，相当于不区分 x^k 与 1。
- 于是只需要考虑在模 $x^k - 1$ 意义下的多项式，即

$$\sum_{i=0}^{+\infty}[i \bmod k = r][x^i](1+x)^{nk} = [x^r]\left((1+x)^{nk} \bmod (x^k - 1)\right).$$

- 在多项式快速幂的同时取模即可。
- 时间复杂度 $O(k^2(\log n + \log k))$。

问题 (洛谷 P4351)

给定 n, a, b, c，定义 $n \times n$ 的矩阵 F 如下：

- 对于 $1 \le i \le n$，$F_{1,i}$ 与 $F_{i,1}$ 为给定的值；
- 对于 $2 \le i, j \le n$，$F_{i,j} = aF_{i-1,j} + bF_{i,j-1} + c$。

求 $F_{n,n}$。

数据范围：$1 \le n \le 2 \times 10^5$。

问题 (洛谷 P4351)

给定 n, a, b, c，定义 $n \times n$ 的矩阵 F 如下：

- 对于 $1 \le i \le n$，$F_{1,i}$ 与 $F_{i,1}$ 为给定的值；
- 对于 $2 \le i, j \le n$，$F_{i,j} = aF_{i-1,j} + bF_{i,j-1} + c$。

求 $F_{n,n}$。

数据范围：$1 \le n \le 2 \times 10^5$。

- 上述形式与格路计数类似：
  - 对于 $(1, i)$ 与 $(i, 1)$，走到 (n, n) 时两个方向上的步数为定值；
  - 于是可以直接得到每个 $F_{1,i}, F_{i,1}$ 的贡献，系数分别为

$$\binom{2n-i-2}{n-2} a^{n-1} b^{n-i}, \binom{2n-i-2}{n-2} a^{n-i} b^{n-1}.$$

- 对于 c，其贡献同样可以按照上述方式计算，系数为

$$\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{n-2}\binom{i+j}{i}a^i b^j.$$

- 对于 c，其贡献同样可以按照上述方式计算，系数为

$$\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{n-2}\binom{i+j}{i}a^ib^j.$$

- 首先令 $n \to n-2$，然后考虑用 EGF 描述上述形式。

- 对于 c，其贡献同样可以按照上述方式计算，系数为

$$\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{n-2}\binom{i+j}{i}a^ib^j.$$

- 首先令 $n \to n-2$，然后考虑用 EGF 描述上述形式。
- 记 $[a^0,\dots,a^n],[b^0,\dots,b^n]$ 的 EGF 分别为 A,B，则所求即为

$$\sum_{i=0}^{2n} i![x^i](AB)(x).$$

- 尝试利用求导得到递推式，以求出 AB 的每一项：

$$(AB)' = AB' + A'B = A(bB - b^{n+1}\frac{x^n}{n!}) + B(aA - a^{n+1}\frac{x^n}{n!})$$
$$= (a+b)(AB) - (Ab^{n+1} + Ba^{n+1})\frac{x^n}{n!}.$$

- 尝试利用求导得到递推式，以求出 AB 的每一项：

$$(AB)' = AB' + A'B = A(bB - b^{n+1}\frac{x^n}{n!}) + B(aA - a^{n+1}\frac{x^n}{n!})$$
$$= (a+b)(AB) - (Ab^{n+1} + Ba^{n+1})\frac{x^n}{n!}.$$

- 记 $f_i = i![x^i](AB)(x)$，在两侧同时提取 x^i 次项系数得到：

$$f_{i+1} = (a+b)f_i - \binom{i}{n}(b^{n+1}a^{i-n} + a^{n+1}b^{i-n}).$$

- 尝试利用求导得到递推式，以求出 AB 的每一项：

$$(AB)' = AB' + A'B = A(bB - b^{n+1}\frac{x^n}{n!}) + B(aA - a^{n+1}\frac{x^n}{n!})$$
$$= (a+b)(AB) - (Ab^{n+1} + Ba^{n+1})\frac{x^n}{n!}.$$

- 记 $f_i = i![x^i](AB)(x)$，在两侧同时提取 x^i 次项系数得到：

$$f_{i+1} = (a+b)f_i - \binom{i}{n}(b^{n+1}a^{i-n} + a^{n+1}b^{i-n}).$$

- 时间复杂度 $O(n)$。

参考资料

- OI Wiki - 数学 https://oi-wiki.org/math/
- ix35 - NOI 一轮复习 IV：组合计数 https://www.luogu.com/article/lkt23718
- VFleaKing - 炫酷反演魔术 https://vfleaking.blog.uoj.ac/slide/87#/